Lars Kuchinke

Klausurtrainer Induktive Statistik I

200 Musteraufgaben mit Musterlösungen

4. Auflage

Studeo Klausurtrainer

STUDEO
RICHTIG STUDIEREN - SEIT 1995

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik

1.1 Übersicht zur Kombinatorik

Die folgende Übersicht enthält die wesentlichen Konzepte dieses Teilgebietes im Zusammenhang. **Arbeiten Sie mit dieser Übersicht, indem Sie** sie vervollständigen und zusätzliche Begriffe und Zusammenhänge einfügen, die für Ihre Klausur relevant sind.

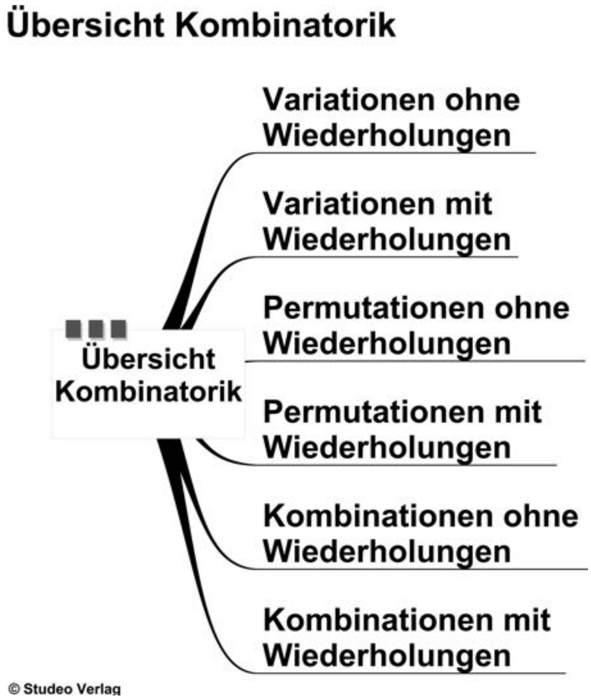

Abb. 1-1: Mindmap Übersicht zur Kombinatorik

1.2 Glossar zur Kombinatorik

Das folgende Glossar enthält die wichtigsten Begriffe zum Teilgebiet. Die Definitionen sind bewusst einfach gehalten, um das Lernen und Erinnern zu erleichtern. Weitergehende Darstellungen und Erläuterungen finden Sie in den Literaturquellen im Reader.
Arbeiten Sie mit diesem Glossar, indem Sie die rechten Spalten der Tabelle ausfüllen und prüfen, ob für Ihre anstehende Klausur noch weitere Begriffe relevant sind. Versuchen Sie diese zu definieren und ergänzen Sie die Tabelle. Bei einigen Begriffen sind noch Zusatzdefinitionen bzw. Fallunterscheidungen angegeben. Prüfen Sie genau, wie das von Ihrem Dozenten gehandhabt wird.

Begriff	Definition	Symbol?	Relevant	Kann ich	noch lernen
Kombination	Jede Zusammenstellung von k aus n Elementen, die sich ohne Berücksichtigung ihrer Anordnung ergibt, wird als Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse (Ordnung) bezeichnet. Man unterscheidet Kombinationen ohne Wiederholung und Kombinationen mit Wiederholung. (siehe auch Kombinatorik)				
Kombinatorik Kombinations-lehre Komplexion	Die Kombinatorik (auch: Kombinationslehre) untersucht die möglichen Arten der Anordnung einer Anzahl von Dingen (Elementen) und deren Zusammenfassung zu Gruppen (Komplexionen) sowie die Bestimmung deren Anzahl. Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Kombinatorik ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung. (siehe auch: Permutation, Variationen, Kombination)				
Permutation	Jede Zusammenstellung, in der alle n gegebenen Elemente in irgendeiner Anordnung stehen, heißt eine Permutation (lat. Vertauschung, Austausch, Umstellung). Man unterscheidet Permutationen ohne Wiederholung, Permutationen mit Wiederholung und Permutationen mit mehreren Gruppen gleicher Elemente. (siehe auch Kombinatorik)				
Variationen (Kombinatorik)	Jede Zusammenstellung von k Elementen aus n Elementen, die sich unter Berücksichtigung ihrer Anordnung ergibt, wird als Variation von n Elementen zur k-ten Klasse (Ordnung) bezeichnet. Man unterscheidet Variationen mit Wiederholung und Variationen ohne Wiederholung. (siehe auch Kombinatorik)				

1.6 Musteraufgaben zur Kombinatorik

Diese Aufgaben sind beispielhaft für den Themenbereich. Arbeiten Sie mit diesen Musteraufgaben, indem Sie die einzelnen Fragen mit den Aufgabenstellungen Ihrer Übung / Ihres Tutoriums, vor allem aber mit denen der alten Klausuren Ihres Lehrstuhls vergleichen. Kreuzen Sie in den rechten Spalten die Fragestellungen an, die für Sie relevant sind, und ergänzen Sie die Liste gegebenenfalls um weitere relevante Fragestellungen in diesem Themenbereich. Schicken Sie uns diese Fragestellungen per Email an verlag@studeo.de.

1.6.1 Musteraufgabe 1 – Permutation ohne Wiederholung (Aufgabentyp MITFAHRGELEGENHEIT, MFG)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 1.1.	Eine Fahrgemeinschaft besteht aus fünf Studenten. Jede Woche fährt ein anderer die Gruppe mit seinem Wagen zur Uni. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der fünf Fahrer sind möglich?			
A 1.2.	Wie viele Möglichkeiten gibt es, die sechs Seiten eines Würfels mit sechs verschiedenen Farben zu streichen?			
A 1.3.	Wie viele verschiedene Sitzanordnungen gibt es für Ihre acht Freunde an Ihrer Geburtstagstafel?			

1.6.2 Musteraufgabe 2 – Permutation mit Wiederholung (Aufgabentyp MISSISIPPI)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 2.1.	Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Buchstaben des Wortes „MISSISIPPI“ kombinieren?			
A 2.2.	Peter möchte mit der S-Bahn fahren, das Ticket kostet 2,50 €. Peter hat 1 Ein-Eurostück, 2 Fünfzigcentstücke und 5 Zehncentstücke. Auf wie viele verschiedene Arten kann Peter die 2,50 € für das Ticket in den Automaten stecken?			
A 2.3.	Der Rangiermeister der Deutschen Bahn hat die Aufgabe, einen Zug aus 6 Wagen zusammenzustellen, wobei 2 Wagen 1. Klasse sind und 4 Wagen 2. Klasse. Wie viele verschiedene Wagenreihungen kann der Rangiermeister erstellen?			

1.6.3 Musteraufgabe 3 – Variation ohne Wiederholung (Aufgabentyp SAFE)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 3.1.	Ein Safe wird mit einer 4-stelligen Zahlenkombination gesichert. Jede Ziffer darf aus Sicherheitsgründen nur einmal vorkommen. Wie viele Zahlenkombinationen sind in diesem Fall möglich?			
A 3.2.	Bei Pferdewetten gilt es, die ersten drei Pferde eines bestimmten Rennens in der richtigen Reihenfolge des Zieldurchlaufes vorherzusagen. Wie viele verschiedene Tipplisten sind möglich, wenn 10 Pferde an den Start gehen?			
A 3.3.	Ein Versicherungsvertreter möchte heute 4 verschiedene Kunden nacheinander aufsuchen. In seiner Kartei befinden sich 20 Kunden, die in verschiedenen Orten wohnen. Wie viele unterschiedliche Tourenpläne kann er erstellen?			

1.6.4 Musteraufgabe 4 – Variation mit Wiederholung (Aufgabentyp PRALINENMISCHUNG)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 4.1.	Aus einer Auswahl von 10 verschiedenen Pralinenarten sollen je 5 Pralinen in eine Schachtel gelegt werden. Aus geschmacklichen Gründen können die Pralinensorten auch öfter in einer Schachtel vorkommen. Wie viel unterschiedliche Schachtelinhalte sind möglich?			
A 4.2.	Ein Würfel wird viermal hintereinander geworfen. Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es?			
A 4.3.	Ein zylindrisches Buchstabenschloss hat drei Ringe. Auf jedem dieser Ringe sind die Vokale A, E, I, O und U eingraviert. Wie viele mögliche Codes gibt es insgesamt, wenn die Buchstaben auch mehrfach vorkommen dürfen?			

1.6.5 Musteraufgabe 5 – Kombination ohne Wiederholung (Aufgabentyp LOTTO)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 5.1.	Wie viele verschiedene Tippscheine sind beim Lotto 5 aus 32 möglich?			
A 5.2.	Beim Vereinspokal in Glücksdorf treten 10 Fußballmannschaften an. Wie viele verschiedene Finalpaarungen sind möglich, wenn man zunächst allen Mannschaften die gleichen Chancen einräumt?			
A 5.3.	Das Bridge-Spiel enthält insgesamt 52 Karten. Jeder Spieler erhält 13 Karten. Wie viele verschiedene Spiele (zu 13 Karten) kann ein Spieler erhalten?			

1.6.6 Musteraufgabe 6 – Kombination mit Wiederholung (Aufgabentyp EINMALEINS)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 6.1.	Wie viele verschiedene Aufgaben enthält das kleine Einmaleins?			
A 6.2.	Es werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wie viele verschiedene Augenpaare können auftreten?			
A 6.3.	Sechs Birnen sollen auf 3 Kinder verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten der Zuteilung gibt es, wenn auch mehrere Kinder gleich viele Birnen bekommen können?			

1.7 Musterlösungen zur Kombinatorik

Diese Musterlösungen sind beispielhaft. Wir haben uns bemüht, insbesondere die Rechenschritte ausführlicher darzustellen als in der Klausur eigentlich nötig. Erläuterungen stehen in der rechten Spalte statt im Text. **Arbeiten Sie mit diesen Lösungen, indem Sie** den Weg eigenständig nachvollziehen und sich Bemerkungen am Rande machen. Sie haben bereits die Aufgabenstellungen mit den Aufgaben Ihrer Übung und der alten Klausuren verglichen. Jetzt müssen Sie dasselbe für die Lösungen machen. Vergleichen Sie die Lösungen Schritt für Schritt und machen Sie sich Notizen. Haken Sie die Lösungen ab, die Sie beherrschen. Lösen Sie die Aufgaben immer wieder, bis Sie sie ohne Nachzuschauen beherrschen. Üben Sie Termumformungen mit dem Studeo®-Rechentrainer (www.rechentrainer.de).

1.7.1. Musterlösung 1 – Permutation ohne Wiederholung (Aufgabentyp MITFAHRGELEGENHEIT)

Lösung	Erläuterungen / Notizen
A 1.1. Eine Fahrgemeinschaft besteht aus fünf Studenten. Jede Woche fährt ein anderer die Gruppe mit seinem Wagen zur Uni. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der fünf Fahrer sind möglich?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐
Gesucht sind alle möglichen Anordnungen von n=5 Elementen (Studenten). In der Aufgabenstellung ist weiterhin der Hinweis gegeben, dass die Reihenfolge wichtig ist. Dies entspricht einer Permutation. Ist eine Wiederholung gegeben? Nein! Jede Woche soll ein Anderer fahren. Damit handelt es sich um eine Permutation ohne Wiederholung. geg.: n = 5 ges.: P(n) = n! Formel (1.4) P(5) = 5! = 120. Es gibt 120 verschiedene Reihenfolgen (Anordnungen), in denen die fünf Studenten zur Uni gelangen können.	An der ersten Stelle der Anordnung können 5 verschiedene Namen stehen, an der zweiten Stelle nur noch vier (da ja ein Name schon für die erste Stelle vergeben wurde), an der dritten Stelle demnach nur noch 3 usw. Die Anzahl alle möglichen Anordnungen ermittelt sich wie folgt: → 5·4·3·2·1 = 5! = 120
A 1.2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die sechs Seiten eines Würfels mit sechs verschiedenen Farben zu streichen?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐
Gegeben sind n = 6 Elemente [Farben], welche auf k = 6 Plätze [Seiten des Würfels] angeordnet werden sollen. Entsprechend der Aufgabenstellung ist im Ergebnis die Anordnung der Farben wesentlich. Gleichzeitig ist n=k. Dies entspricht einer Permutation. Eine Wiederholung der Elemente wird ausgeschlossen [...*verschiedenen* Farben...]. Damit handelt es sich um eine Permutation ohne Wiederholung. geg.: n = 6 ges.: P(n) = n! (1.4) P(6) = 6! = 720. Auf 720 verschiedene Arten kann man einen sechsseitigen Würfel mit sechs verschiedenen Farben streichen.	Sie sollten sich hier von der Vorstellung eines Würfels lösen. Es ist nur wichtig, dass er 6 Seiten hat, also 6 mögliche Stellen, auf denen die 6 Farben (Elemente) angeordnet werden können.
A 1.3. Wie viele verschiedene Sitzanordnungen gibt es für Ihre acht Freunde an Ihrer Geburtstagstafel?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐
Diese Fragestellung beinhaltet, dass genau 8 Plätze (k = 8 Stellen) an ihrer Geburtstagstafel vorhanden sind, welche die acht Freunde (n = 8 Elemente) einnehmen können. Hier ist keine Wiederholung möglich, da ein Freund auch nur einen Platz einnehmen wird. Dies entspricht einer Permutation ohne Wiederholung. geg.: n = 8	Beachten Sie bitte, dass es hier genau n = k Elemente (hier Freunde) gibt. Gäbe es mehr Freunde als freie Sitzplätze, entspräche dies dann einer Variation ohne Wiederholung (vgl. 1.9.3).

2.3 Aufgabensystematik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die folgende Übersicht stellt die am meisten in Klausuren verwendeten Aufgabentypen und -stellungen dieses Themenbereichs dar. Die genaue Aufgabenstellung in Klausuren Ihres Lehrstuhls kann davon abweichen.
Arbeiten sie mit dieser Übersicht, indem Sie die Inhalte der alten Klausuraufgaben Ihres Lehrstuhls anhand dieses Schemas sorgfältig überprüfen und systematisieren. Passen Sie die Übersicht gegebenenfalls an oder ergänzen Sie sie.

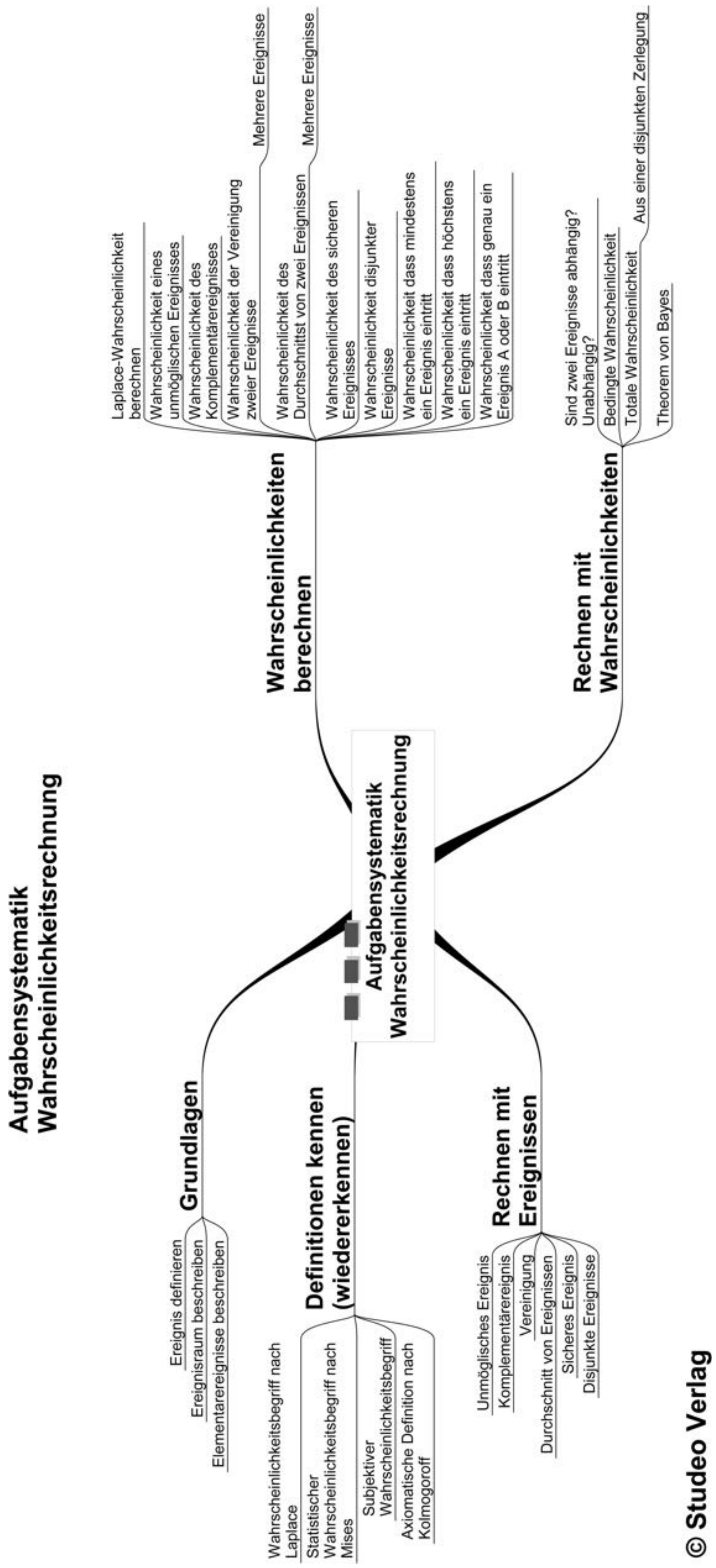

Abb. 2-2: Mindmap Aufgabensystematik Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.6 Musteraufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diese Aufgaben sind beispielhaft für den Themenbereich. **Arbeiten Sie mit diesen Musteraufgaben, indem Sie** die einzelnen Fragen mit den Aufgabenstellungen Ihrer Übung / Ihres Tutoriums, vor allem aber mit denen der alten Klausuren Ihres Lehrstuhls vergleichen. Kreuzen Sie in den rechten Spalten die Fragestellungen an, die für Sie relevant sind und ergänzen Sie die Liste gegebenenfalls um weitere relevante Fragestellungen in diesem Themenbereich. Schicken Sie uns diese Fragestellungen per Email an verlag@studeo.de.

2.6.1 Musteraufgabe 1 – Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Ein Würfel wird einmal geworfen. Betrachtet werden die drei Ereignisse:

A: „Die Augenzahl ist kleiner als 4“
B: „Die Augenzahl ist gerade“ und
C: „Die Augenzahl ist 5“.

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 1.1.	Geben Sie für dieses Zufallsexperiment den Ereignisraum an.			
A 1.2.	Definieren Sie die Ereignisse A, B und C mittels der Elementarereignisse.			
A 1.3.	Geben Sie die Ereignisse für A\B an.			
A 1.4.	Bestimmen Sie den Durchschnitt der Ereignisse A und B.			
A 1.5.	Bestimmen Sie die Vereinigung der Ereignisse A und B.			
A 1.6.	Stellen Sie die Ereignisse A und B, deren Vereinigung und deren Durchschnitt in einem Venn-Diagramm dar.			
A 1.7.	Geben Sie ein unmögliches Ereignis für dieses Zufallsexperiment an			
A 1.8.	Was ist das Komplementärereignis zu A?			
A 1.9.	Was ist das Komplementärereignis zu C?			
A 1.10.	Gilt $A \subset B$?			
A 1.11.	Sind die Ereignisse A und B disjunkt?			
A 1.12.	Sind die Ereignisse A und C disjunkt?			
A 1.13.	Sind die Ereignisse A und C äquivalent?			
A 1.14.	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C nach der Definition von Laplace.			
A 1.15.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt?			
A 1.16.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt?			
A 1.17.	Welche Wahrscheinlichkeit hat das Komplementärereignis zu C?			
A 1.18.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Ereignisse A bzw. B eintritt?			
A 1.19.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Ereignisse A bzw. B eintritt?			
A 1.20.	Was ist das sichere Ereignis? (Beschreiben Sie dies mit den gegebenen Ereignissen)			
A 1.21.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Ereignis A oder B eintritt?			

A 1.15. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

ges.: $P(A \cap B)$?

Bestimmen Sie die günstigen Ereignisse von $(A \cap B)$.

$A \cap B = \{2\}$

Zählen Sie die günstigen Ereignisse, die zum Ereignis $(A \cap B)$ gehören, und berechnen Sie die Laplace-Wahrscheinlichkeit.

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(A \cap B)$ beträgt $\frac{1}{6}$.

Nur an den Stellen, wo sich die Ereignismengen überschneiden (Durchschnitt), treten auch beide Ereignisse ein. (siehe A 1.4. und A 1.6.)

A 1.16. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

ges.: $P(A \cup B)$?

1. Weg: Bestimmen Sie die Anzahl der günstigen Ereignisse $(A \cup B)$.

$A \cup B = \{1;2;3;4;6\}$

$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

(siehe A 1.5.)

2. Weg: Allgemeiner Additionssatz (2.4)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

geg.: $P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$ beträgt $\frac{5}{6}$.

A 1.17. Welche Wahrscheinlichkeit hat das Komplementärereignis zu C?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

ges.: $P(\overline{C})$?

geg.: $P(C) = \frac{1}{6}$ (siehe A 1.14.)

$P(\overline{C}) = 1 - P(C)$ (2.3)

$P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{C})$ des Komplementärereignisses von C beträgt $\frac{5}{6}$.

Die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses ist immer 1 minus der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses (hier C).

A 1.18. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Ereignisse A bzw. B eintritt?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

ges.: $P(\overline{A \cup B})$

Wenn keines der Ereignisse A und B eintreten soll, so heißt das, dass „weder A noch B eintreten“. Dies ist aber genau das Komplementärereignis zu „A oder B treten ein“.

Bestimmen Sie $P(A \cup B)$ und berechnen Sie dann:

(vgl. A 1.16.)

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keines der beiden Ereignisse eintritt, ist $\frac{1}{6}$.

A 1.19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Ereignisse A bzw. B eintritt?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

Weg 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eins der Ereignisse A bzw. B eintritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass A oder B oder beide Ereignisse eintreten. Letzteres ist aber $P(A \cup B)$.

$$P(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \qquad (6.15)$$

bzw. das genaue Intervall als:

$$[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}] \qquad (6.15)$$

Zur Sicherheit schreiben Sie beide Formeln für dieses Konfidenzintervall auf, da man sich nie sicher sein kann, was der Professor genau meint.

A 2.4.	Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Anzahl der mit einem Toner bedruckbaren Seiten.	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

Nachdem Sie in Aufg. 2.3 die Formel für das Konfidenzintervall angeben mussten, bekommen Sie nun die zusätzliche Information, dass das Konfidenzniveau 95% ist,

Konfidenzniveau = $1-\alpha = 0{,}95$

und dass sich ihre Intervallschätzung auf die Stichprobe aus der Aufgabenstellung beziehen soll. Damit haben Sie alle Informationen, die Sie benötigen. Setzen Sie die Werte in die Formel (6.15) ein und bestimmen Sie das Konfidenzintervall.

geg.: $\overline{x} = 3100$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{47000} = 216{,}79$

$n = 6$

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05$

$df = n-1 = 5$

Ein Freiheitsgrad geht aufgrund der Schätzung der unbekannten Varianz verloren.

Bestimmen Sie das Quantil der t-Verteilung $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$ aus der Verteilungstabelle.

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};df} = t_{1-\frac{0,05}{2};df=5} = t_{1-0,025;df=5} = t_{0,975;df=5}$$
$$= 2{,}571$$

$$[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}] = [3100 - 2{,}571\frac{216{,}79}{\sqrt{6}}; 3100 + 2{,}571\frac{216{,}79}{\sqrt{6}}] \qquad (6.15)$$
$$= [2872{,}01;\ 3327{,}99]$$

Wenn es an Ihrem Lehrstuhl üblich ist, so geben Sie hier auch die Grenzen einzeln an:

$g_u = 2872{,}01$

$g_o = 3327{,}99$

Das gesuchte 95% Konfidenzintervall beträgt $[2872{,}01;\ 3327{,}99]$.

A 2.5.	Verbalisieren Sie das Ergebnis von A 3.4.!	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

Mit einer Sicherheit von 95% überdeckt das Konfidenzintervall zwischen $g_u = 2872{,}01$ und $g_o = 3327{,}99$ Seiten den unbekannten Parameter μ für die Anzahl der mit einem Toner bedruckbaren Seiten.

A 2.6.	Welche Möglichkeiten haben Sie bei der Planung einer solchen Untersuchung, Einfluss auf die Länge des Schätzintervalls zu nehmen?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

Schauen Sie sich die Formel der Länge des Intervalls für diese Schätzung genau an:

$$l = 2 \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (6.15)$$

In der Formel stehen genau 5 Parameter, die vor der Untersuchung nicht bestimmt sind: α, df, $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$, s, n.

- s die Realisierung einer Zufallsvariablen aufgrund der Stichprobenziehung (also zufällig)
- $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$ ist selbst nur von $(1-\alpha)$ und den Freiheitsgraden df abhängig
- df = n-1 (also von n abhängig)

Wie Sie sehen können, haben Sie nur einen Einfluss auf die Wahl von α und die Stichprobengröße n. Dies ist hier die richtige Antwort:

Die Länge des Schätzintervalls kann durch die Größe der Stichprobe n und das vorgegebene Konfidenzniveau α beeinflusst werden.

A 2.7.	Wie würde sich das Schätzintervall verändern, wenn σ^2 als bekannt vorausgesetzt werden kann?	Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

Sie müssten dann die andere Formel für das Konfidenzintervall des Erwartungswertes bei bekannter Varianz benutzen:

X Y	Mann	Frau	
gut	5	15	20
mittel	10	5	15
schlecht	5	10	15
	20	30	50

Summer der Zeilen- bzw. Spaltenwerte...

(vgl. Kap. 4)

A 3.2. Formulieren Sie verbal die Hypothesen.

Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

H_0: „Kleidungsstil und Geschlecht sind stochastisch unabhängig"
H_1: „Kleidungsstil und Geschlecht sind nicht stochastisch unabhängig"

Paul möchte eine Zusammenhangshypothese testen. Dazu setzt man erst einmal die Unabhängigkeit voraus – um sie ggf. abzulehnen.

A 3.3. Ist eine Anwendung der χ^2-Verteilung hier gerechtfertigt ?

Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

Prüfen Sie die Bedingungen in der Formel (7.12)!

Es muss gelten: $h_{e_{ij}} > 5$ für alle i,j, d.h. die aus den Randverteilungen theoretisch zu erwartenden Häufigkeiten $h_{e_{ij}}$ müssen alle größer als 5 sein.

Erstellen Sie eine Tabelle der zu erwartenden Häufigkeiten. Dazu wird jeder Wert einer Zelle aus den Randverteilungen (unter Annahme der Unabhängigkeit der beiden Verteilungen X und Y) berechnet:

$$h_{e_{ij}} = \frac{H_{i\bullet} \cdot H_{\bullet j}}{n}$$

X Y	Mann	Frau	$H_{i\bullet}$
gut	8	12	20
mittel	6	9	15
schlecht	6	9	15
$H_{\bullet j}$	20	30	50

Es gilt die Bedingung $h_{e_{ij}} > 5$, weshalb die χ^2-Verteilung angewendet werden darf.

A 3.4. Fällen Sie die Entscheidung bei $\alpha = 1\%$.

Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

geg.: theoretische und beobachtete Verteilung
$\alpha = 0{,}01$

Bestimmen Sie das Quantil der χ^2-Verteilung.
Die Freiheitsgrade berechnen sich nach df=(I-1)(J-1)=(3-1)(2-1)=2 (7.12)

$$\chi^2_{1-\alpha;df} = \chi^2_{0,99;2} = 9{,}21$$

Auch hier erfolgt wieder eine einseitige Bestimmung des kritischen Wertes, da die Summe in der Testgröße nur größer werden kann... bis Sie irgendwann zur Ablehnung der Nullhypothese führt.

Berechnen Sie anschließend die Testgröße.

$$T = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{(h_{0_{ij}} - h_{e_{ij}})^2}{h_{e_{ij}}} \qquad (7.12)$$

$$T = \frac{(5-8)^2}{8} + \frac{(10-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(15-12)^2}{12} + \frac{(5-9)^2}{9} + \frac{(10-9)^2}{9}$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{16}{6} + \frac{1}{6} + \frac{9}{12} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= 6{,}597$$

Es gilt: T=6,597 < $\chi^2_{0,99;2} = 9{,}21$. Für die vorliegende Zufallsstichprobe und ein gegebenes α=0,01 kann die Nullhypothese der Unabhängigkeit der beiden Verteilungen nicht verworfen werden.

A 3.5. Fällen Sie die Entscheidung bei $\alpha = 5\%$.

Relev. ☐ Ü1 ☐ Ü2 ☐ Ü3 ☐ OK ☐

geg.: theoretische und beobachtete Verteilung
$\alpha = 0{,}05$

Bestimmen Sie das Quantil der χ^2-Verteilung.