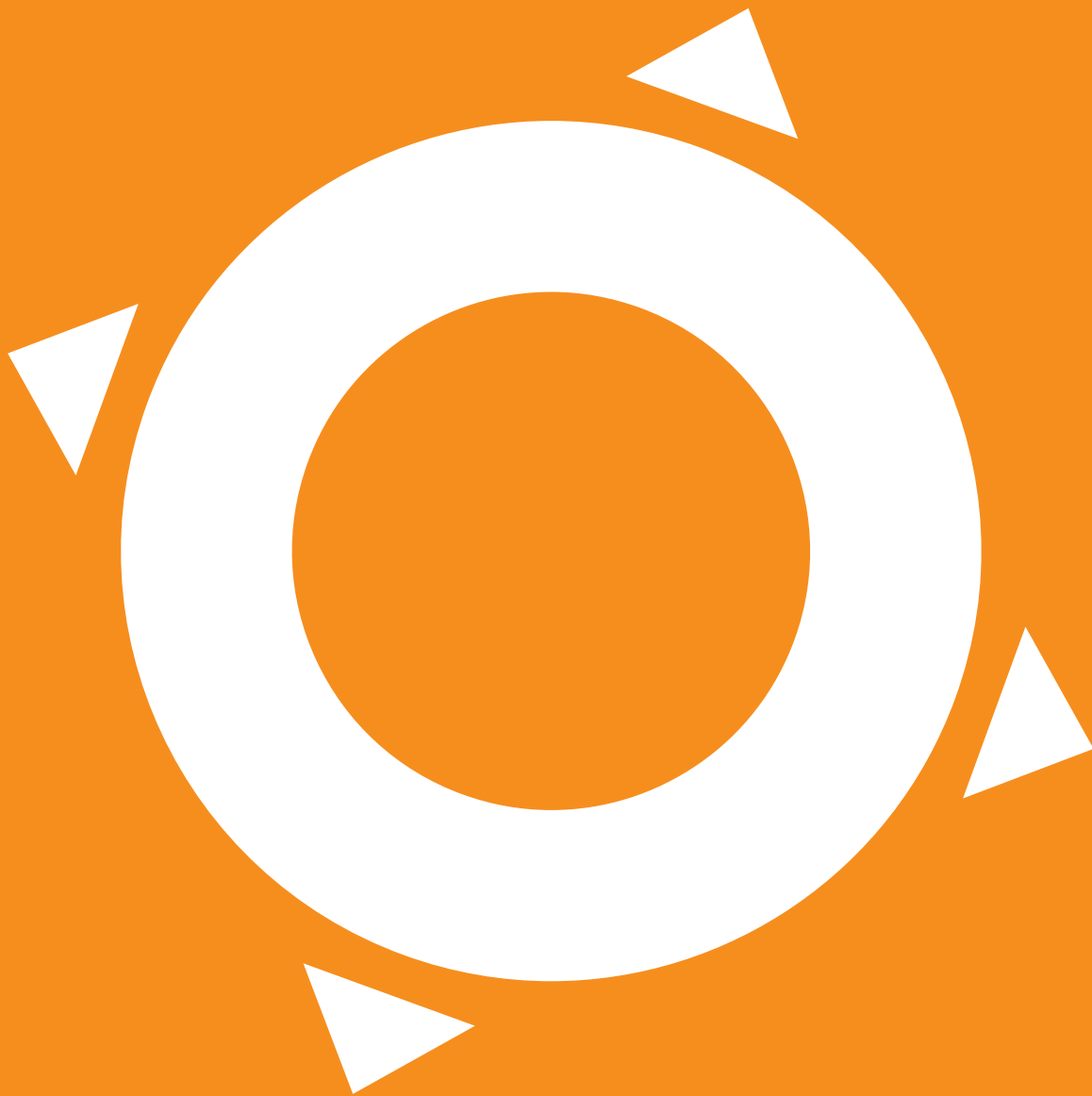


Lars Kuchinke

Klausurtrainer Induktive Statistik I

200 Musteraufgaben mit Musterlösungen

4. Auflage



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
Inhaltsverzeichnis	9
Abbildungsverzeichnis	13
Abkürzungsverzeichnis	13
Einleitung – Wie Sie mit diesem Klausurtrainer arbeiten sollten	14
1 Kombinatorik	16
1.1 Übersicht zur Kombinatorik	16
1.2 Glossar zur Kombinatorik	16
1.3 Aufgabensystematik zur Kombinatorik	17
1.4 Rechencheckliste zur Kombinatorik	17
1.5 Symbolliste zur Kombinatorik	18
1.6 Musteraufgaben zur Kombinatorik	19
1.6.1 Musteraufgabe 1 – Permutation ohne Wiederholung (Aufgabentyp MITFAHRGELEGENHEIT, MFG)	19
1.6.2 Musteraufgabe 2 – Permutation mit Wiederholung (Aufgabentyp MISSISSIPPI)	19
1.6.3 Musteraufgabe 3 – Variation ohne Wiederholung (Aufgabentyp SAFE)	19
1.6.4 Musteraufgabe 4 – Variation mit Wiederholung (Aufgabentyp PRALINENMISCHUNG)	19
1.6.5 Musteraufgabe 5 – Kombination ohne Wiederholung (Aufgabentyp LOTTO)	19
1.6.6 Musteraufgabe 6 – Kombination mit Wiederholung (Aufgabentyp EINMALEINS)	20
1.7 Musterlösungen zur Kombinatorik	20
1.7.1 Musterlösung 1 – Permutation ohne Wiederholung (Aufgabentyp MITFAHRGELEGENHEIT)	20
1.7.2 Musterlösung 2 – Permutation mit Wiederholung (Aufgabentyp MISSISSIPPI)	21
1.7.3 Musterlösung 3 – Variation ohne Wiederholung (Aufgabentyp SAFE)	22
1.7.4 Musterlösung 4 – Variation mit Wiederholung (Aufgabentyp PRALINENMISCHUNG)	23
1.7.5 Musterlösung 5 – Kombination ohne Wiederholung (Aufgabentyp LOTTO)	23
1.7.6 Musterlösung 6 – Kombination mit Wiederholung (Aufgabentyp EINMALEINS)	24
1.8 Algorithmen zur Kombinatorik	26
1.8.1 Allgemeine Systematik der Kombinatorik	26
1.8.2 Prüfen, ob die Reihenfolge = Anordnung wichtig ist?	26
1.8.3 Berechnung Permutation	26
1.8.4 Permutation mit Wiederholung	27
1.8.5 Berechnung Variation	27
1.8.6 Berechnung Variation mit Wiederholung	27
1.8.7 Berechnung Kombination	28
1.8.8 Berechnung Kombination mit Wiederholung	28
1.9 Übungsaufgaben zur Kombinatorik	29
1.10 Lösungen zu den Übungsaufgaben	31
1.11 Formelsammlung zur Kombinatorik	31
1.12 Reader zur Kombinatorik	32
2 Wahrscheinlichkeitsrechnung	33
2.1 Übersicht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	33
2.2 Glossar zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	33
2.3 Aufgabensystematik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	35
2.4 Rechencheckliste zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	36
2.5 Symbolliste zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	36
2.6 Musteraufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	37
2.6.1 Musteraufgabe 1 – Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	37
2.6.2 Musteraufgabe 2 – Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit	38
2.7 Musterlösungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	38
2.7.1 Musterlösung 1 – Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	38
2.7.2 Musterlösung 2 – Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit	42

2.8	Algorithmen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	47
2.8.1	Zeichnen eines Venn-Diagramms	47
2.8.2	Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit.....	48
2.8.3	Berechnung einer totalen Wahrscheinlichkeit.....	48
2.8.4	Überprüfung der Unabhängigkeit zweier Ereignisse	48
2.9	Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	49
2.10	Lösungen zu den Übungsaufgaben	51
2.11	Formelsammlung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	52
2.12	Reader zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	53
3	Eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	54
3.1	Übersicht zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	54
3.2	Glossar zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	54
3.3	Aufgabensystematik zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	56
3.4	Rechencheckliste zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	57
3.5	Symbolliste zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	58
3.6	Musteraufgaben zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	58
3.6.1	Musteraufgabe 1 – diskrete (eindimensionale) Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	58
3.6.2	Musteraufgabe 2 – stetige (eindimensionale) Wahrscheinlichkeitsverteilung	59
3.6.3	Musteraufgabe 3 – Ungleichung von Tschebychev	59
3.7	Musterlösungen zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	60
3.7.1	Musterlösung 1 – diskrete (eindimensionale) Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	60
3.7.2	Musterlösung 2 – stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	65
3.7.3	Musterlösung 3 – Ungleichung von Tschebychev	69
3.8	Algorithmen zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	71
3.8.1	Ermitteln einer Wahrscheinlichkeitsfunktion aus einer Verteilungsfunktion – diskrete Verteilungen.....	71
3.8.2	Ermitteln einer Dichtefunktion aus einer Verteilungsfunktion – stetige Verteilungen.....	71
3.8.3	Ermitteln einer Verteilungsfunktion aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion – diskrete Verteilungen.....	72
3.8.4	Ermitteln einer Verteilungsfunktion aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion – stetige Verteilungen.....	72
3.8.5	Zeichnen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung/-dichte	72
3.8.6	Zeichnen einer Verteilungsfunktion für diskrete Verteilungen.....	73
3.8.7	Zeichnen einer Verteilungsfunktion für stetige Verteilungen	73
3.8.8	Ungleichung von Tschebychev ermitteln.....	73
3.8.9	Momente höherer Ordnung, Erwartungswert für stetige Wahrscheinlichkeitsfunktionen berechnen	74
3.8.10	Varianz einer Wahrscheinlichkeitsfunktion berechnen.....	74
3.8.11	Berechnen der Wahrscheinlichkeit, in einem k-fachen Schwankungsintervall zu liegen.....	74
3.9	Übungsaufgaben zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	76
3.10	Lösungen zu den Übungsaufgaben	79
3.11	Formelsammlung zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	80
3.12	Reader zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	81
4	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	82
4.1	Übersicht zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	82
4.2	Glossar zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	82
4.3	Aufgabensystematik zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	84
4.4	Rechencheckliste zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	85
4.5	Symbolliste zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	86
4.6	Musteraufgaben zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	86
4.6.1	Musteraufgabe 1 – Grundlagen der zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	86
4.6.2	Musteraufgabe 2 – Unabhängigkeit, Kovarianz und Korrelation	87
4.6.3	Musteraufgabe 3 – Vervollständigen des gemeinsamen Tableaus.....	87
4.6.4	Musteraufgabe 4 – Stetige Zufallsvariablen.....	87
4.7	Musterlösungen zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	88
4.7.1	Musterlösung 1 – Grundlagen der zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	88
4.7.2	Musterlösung 2 – Unabhängigkeit, Kovarianz und Korrelation	93
4.7.3	Musterlösung 3 – Vervollständigen des gemeinsamen Tableaus.....	96
4.7.4	Musterlösung 4 – Stetige Zufallsvariablen.....	98

4.8	Algorithmen zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	103
4.8.1	Zeichnen einer zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung	103
4.8.2	Bestimmung der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen.....	103
4.8.3	Kovarianz und Korrelationskoeffizient bestimmen	103
4.8.4	Diskrete Randverteilungen bestimmen	104
4.8.5	Stetige Randverteilungen bestimmen.....	104
4.8.6	Diskrete Verteilungsfunktion bestimmen.....	104
4.8.7	Parameter bedingter Verteilungen bestimmen (bedingter Erwartungswert, bedingte Varianz)	105
4.9	Übungsaufgaben zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	105
4.10	Lösungen zu den Übungsaufgaben.....	108
4.11	Formelsammlung zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	110
4.12	Reader zur zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	111
5	Spezielle Verteilungsmodelle.....	112
5.1	Übersicht zu den Speziellen Verteilungsmodellen.....	112
5.2	Glossar zu den Speziellen Verteilungsmodellen.....	112
5.3	Aufgabensystematik zu den Speziellen Verteilungsmodellen	114
5.4	Rechencheckliste zu den Speziellen Verteilungsmodellen	115
5.5	Symbolliste zu den Speziellen Verteilungsmodellen	116
5.6	Musteraufgaben zu den Speziellen Verteilungsmodellen	117
5.6.1	Musteraufgabe 1 – Gleichverteilung (diskret)	117
5.6.2	Musteraufgabe 2 – Binomialverteilung.....	117
5.6.3	Musteraufgabe 3 – Poissonverteilung	117
5.6.4	Musteraufgabe 4 – Geometrische Verteilung.....	118
5.6.5	Musteraufgabe 5 – Hypergeometrische Verteilung	118
5.6.6	Musteraufgabe 6 – Exponentialverteilung	118
5.6.7	Musteraufgabe 7 – Normalverteilung	118
5.7	Musterlösungen zu den Speziellen Verteilungsmodellen	119
5.7.1	Musterlösung 1 – Gleichverteilung (diskret)	119
5.7.2	Musterlösung 2 – Binomialverteilung.....	120
5.7.3	Musterlösung 3 – Poissonverteilung	122
5.7.4	Musterlösung 4 – Geometrische Verteilung.....	124
5.7.5	Musterlösung 5 – Hypergeometrische Verteilung	125
5.7.6	Musterlösung 6 – Exponentialverteilung	126
5.7.7	Musterlösung 7 – Normalverteilung	127
5.8	Algorithmen zu den Speziellen Verteilungsmodellen.....	131
5.8.1	Woran man eine Geometrische Verteilung erkennt	131
5.8.2	Woran man eine Hypergeometrische Verteilung erkennt.....	131
5.8.3	Woran man eine Binomialverteilung erkennt	131
5.8.4	Woran man eine Poisson-Verteilung erkennt.....	132
5.8.5	Approximation einer Hypergeometrischen Verteilung.....	132
5.8.6	Approximation einer Binomialverteilung	132
5.9	Übungsaufgaben zu den Speziellen Verteilungsmodellen.....	133
5.10	Lösungen zu den Übungsaufgaben.....	136
5.11	Formelsammlung zu den Speziellen Verteilungsmodellen	137
5.12	Reader zu den Speziellen Verteilungsmodellen.....	139
6	Einfache statistische Schätzverfahren.....	140
6.1	Übersicht zu den Statistischen Schätzverfahren.....	140
6.2	Glossar zu den Statistischen Schätzverfahren	140
6.3	Aufgabensystematik Einfache statistische Schätzverfahren	143
6.4	Rechencheckliste zu den Statistischen Schätzverfahren	144
6.5	Symbolliste zu den Statistischen Schätzverfahren	145
6.6	Musteraufgaben Einfache statistische Schätzverfahren	146
6.6.1	Musteraufgabe 1 – Stichprobentheorie	146
6.6.2	Musteraufgabe 2 – Punkt- und Intervallschätzung.....	146
6.6.3	Musteraufgabe 3 – Erwartungstreue	147

1 Kombinatorik

1.1 Übersicht zur Kombinatorik

Die folgende Übersicht enthält die wesentlichen Konzepte dieses Teilgebietes im Zusammenhang. Arbeiten Sie mit dieser Übersicht, indem Sie sie vervollständigen und zusätzliche Begriffe und Zusammenhänge einfügen, die für Ihre Klausur relevant sind.

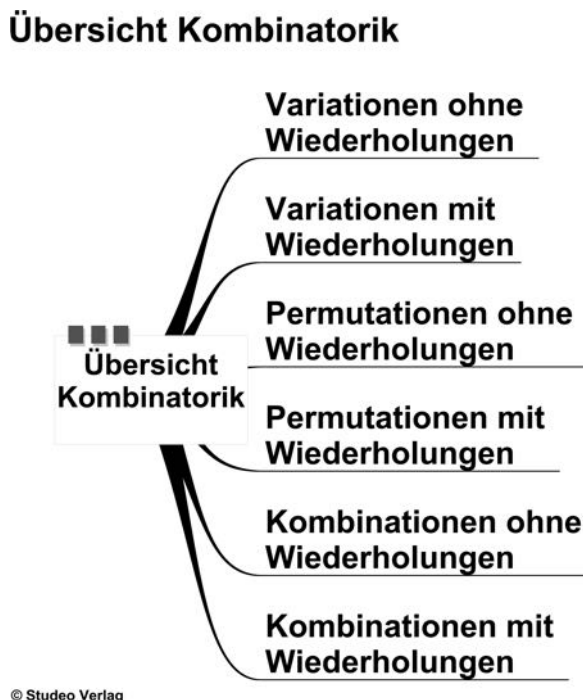


Abb. 1-1: Mindmap Übersicht zur Kombinatorik

1.2 Glossar zur Kombinatorik

Das folgende Glossar enthält die wichtigsten Begriffe zum Teilgebiet. Die Definitionen sind bewusst einfach gehalten, um das Lernen und Erinnern zu erleichtern. Weitergehende Darstellungen und Erläuterungen finden Sie in den Literaturquellen im Reader.

Arbeiten Sie mit diesem Glossar, indem Sie die rechten Spalten der Tabelle ausfüllen und prüfen, ob für Ihre anstehende Klausur noch weitere Begriffe relevant sind. Versuchen Sie diese zu definieren und ergänzen Sie die Tabelle. Bei einigen Begriffen sind noch Zusatzdefinitionen bzw. Fallunterscheidungen angegeben. Prüfen Sie genau, wie das von Ihrem Dozenten gehandhabt wird.

Begriff	Definition	Symbol?	Relevant	Kann ich	noch lernen
Kombination	Jede Zusammenstellung von k aus n Elementen, die sich ohne Berücksichtigung ihrer Anordnung ergibt, wird als Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse (Ordnung) bezeichnet. Man unterscheidet Kombinationen ohne Wiederholung und Kombinationen mit Wiederholung. (siehe auch Kombinatorik)				
Kombinatorik Kombinationslehre Komplexion	Die Kombinatorik (auch: Kombinationslehre) untersucht die möglichen Arten der Anordnung einer Anzahl von Dingen (Elementen) und deren Zusammenfassung zu Gruppen (Komplexionen) sowie die Bestimmung deren Anzahl. Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Kombinatorik ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung. (siehe auch: Permutation, Variationen, Kombination)				
Permutation	Jede Zusammenstellung, in der alle n gegebenen Elemente in irgendeiner Anordnung stehen, heißt eine Permutation (lat. Vertauschung, Austausch, Umstellung). Man unterscheidet Permutationen ohne Wiederholung, Permutationen mit Wiederholung und Permutationen mit mehreren Gruppen gleicher Elemente. (siehe auch Kombinatorik)				
Variationen (Kombinatorik)	Jede Zusammenstellung von k Elementen aus n Elementen, die sich unter Berücksichtigung ihrer Anordnung ergibt, wird als Variation von n Elementen zur k-ten Klasse (Ordnung) bezeichnet. Man unterscheidet Variationen mit Wiederholung und Variationen ohne Wiederholung. (siehe auch Kombinatorik)				

1.6 Musteraufgaben zur Kombinatorik

Diese Aufgaben sind beispielhaft für den Themenbereich. Arbeiten Sie mit diesen Musteraufgaben, indem Sie die einzelnen Fragen mit den Aufgabenstellungen Ihrer Übung / Ihres Tutoriums, vor allem aber mit denen der alten Klausuren Ihres Lehrstuhls vergleichen. Kreuzen Sie in den rechten Spalten die Fragestellungen an, die für Sie relevant sind, und ergänzen Sie die Liste gegebenenfalls um weitere relevante Fragestellungen in diesem Themenbereich. Schicken Sie uns diese Fragestellungen per Email an verlag@studeo.de.

1.6.1 Musteraufgabe 1 – Permutation ohne Wiederholung (Aufgabentyp MITFAHRGELEGENHEIT, MFG)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 1.1.	Eine Fahrgemeinschaft besteht aus fünf Studenten. Jede Woche fährt ein anderer die Gruppe mit seinem Wagen zur Uni. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der fünf Fahrer sind möglich?			
A 1.2.	Wie viele Möglichkeiten gibt es, die sechs Seiten eines Würfels mit sechs verschiedenen Farben zu streichen?			
A 1.3.	Wie viele verschiedene Sitzanordnungen gibt es für Ihre acht Freunde an Ihrer Geburtstagstafel?			

1.6.2 Musteraufgabe 2 – Permutation mit Wiederholung (Aufgabentyp MISSISSIPPI)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 2.1.	Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Buchstaben des Wortes „MISSISSIPPI“ kombinieren?			
A 2.2.	Peter möchte mit der S-Bahn fahren, das Ticket kostet 2,50 €. Peter hat 1 Ein-Eurostück, 2 Fünfundzigcentstücke und 5 Zehncentstücke. Auf wie viele verschiedene Arten kann Peter die 2,50 € für das Ticket in den Automaten stecken?			
A 2.3.	Der Rangiermeister der Deutschen Bahn hat die Aufgabe, einen Zug aus 6 Wagen zusammenzustellen, wobei 2 Wagen 1. Klasse sind und 4 Wagen 2. Klasse. Wie viele verschiedene Wagenreihungen kann der Rangiermeister erstellen?			

1.6.3 Musteraufgabe 3 – Variation ohne Wiederholung (Aufgabentyp SAFE)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 3.1.	Ein Safe wird mit einer 4-stelligen Zahlenkombination gesichert. Jede Ziffer darf aus Sicherheitsgründen nur einmal vorkommen. Wie viele Zahlenkombinationen sind in diesem Fall möglich?			
A 3.2.	Bei Pferdewetten gilt es, die ersten drei Pferde eines bestimmten Rennens in der richtigen Reihenfolge des Zieldurchlaufes vorherzusagen. Wie viele verschiedene Tipplisten sind möglich, wenn 10 Pferde an den Start gehen?			
A 3.3.	Ein Versicherungsvertreter möchte heute 4 verschiedene Kunden nacheinander aufsuchen. In seiner Kartei befinden sich 20 Kunden, die in verschiedenen Orten wohnen. Wie viele unterschiedliche Tourenpläne kann er erstellen?			

1.6.4 Musteraufgabe 4 – Variation mit Wiederholung (Aufgabentyp PRALINENMISCHUNG)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 4.1.	Aus einer Auswahl von 10 verschiedenen Pralinenarten sollen je 5 Pralinen in eine Schachtel gelegt werden. Aus geschmacklichen Gründen können die Pralinenarten auch öfter in einer Schachtel vorkommen. Wie viel unterschiedliche Schachtelinhalt sind möglich?			
A 4.2.	Ein Würfel wird viermal hintereinander geworfen. Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es?			
A 4.3.	Ein zylindrisches Buchstabenschloss hat drei Ringe. Auf jedem dieser Ringe sind die Vokale A, E, I, O und U eingraviert. Wie viele mögliche Codes gibt es insgesamt, wenn die Buchstaben auch mehrfach vorkommen dürfen?			

1.6.5 Musteraufgabe 5 – Kombination ohne Wiederholung (Aufgabentyp LOTTO)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 5.1.	Wie viele verschiedene Tippscheine sind beim Lotto 5 aus 32 möglich?			
A 5.2.	Beim Vereinspokal in Glücksdorf treten 10 Fußballmannschaften an. Wie viele verschiedene Finalpaarungen sind möglich, wenn man zunächst allen Mannschaften die gleichen Chancen einräumt?			
A 5.3.	Das Bridge-Spiel enthält insgesamt 52 Karten. Jeder Spieler erhält 13 Karten. Wie viele verschiedene Spiele (zu 13 Karten) kann ein Spieler erhalten?			

1.6.6 Musteraufgabe 6 – Kombination mit Wiederholung (Aufgabentyp EINMALEINS)

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 6.1.	Wie viele verschiedene Aufgaben enthält das kleine Einmaleins?			
A 6.2.	Es werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wie viele verschiedene Augenpaare können auftreten?			
A 6.3.	Sechs Birnen sollen auf 3 Kinder verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten der Zuteilung gibt es, wenn auch mehrere Kinder gleich viele Birnen bekommen können?			

1.7 Musterlösungen zur Kombinatorik

Diese Musterlösungen sind beispielhaft. Wir haben uns bemüht, insbesondere die Rechenschritte ausführlicher darzustellen als in der Klausur eigentlich nötig. Erläuterungen stehen in der rechten Spalte statt im Text. **Arbeiten Sie mit diesen Lösungen, indem Sie** den Weg eigenständig nachvollziehen und sich Bemerkungen am Rande machen. Sie haben bereits die Aufgabenstellungen mit den Aufgaben Ihrer Übung und der alten Klausuren verglichen. Jetzt müssen Sie dasselbe für die Lösungen machen. Vergleichen Sie die Lösungen Schritt für Schritt und machen Sie sich Notizen. Haken Sie die Lösungen ab, die Sie beherrschen. Lösen Sie die Aufgaben immer wieder, bis Sie sie ohne Nachzuschauen beherrschen. Üben Sie Termumformungen mit dem Studeo-Rechentainer (www.rechentainer.de).

1.7.1. Musterlösung 1 – Permutation ohne Wiederholung (Aufgabentyp MITFAHRGELEGENHEIT)

Lösung	Erläuterungen / Notizen
<p>A 1.1. Eine Fahrgemeinschaft besteht aus fünf Studenten. Jede Woche fährt ein anderer die Gruppe mit seinem Wagen zur Uni. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der fünf Fahrer sind möglich?</p> <p>Gesucht sind alle möglichen Anordnungen von $n=5$ Elementen (Studenten). In der Aufgabenstellung ist weiterhin der Hinweis gegeben, dass die Reihenfolge wichtig ist. Dies entspricht einer Permutation.</p> <p>Ist eine Wiederholung gegeben? Nein! Jede Woche soll ein Anderer fahren.</p> <p>Damit handelt es sich um eine Permutation ohne Wiederholung.</p> <p>geg.: $n = 5$ ges.: $P(n) = n!$ Formel (1.4)</p> <p>$P(5) = 5! = 120.$</p> <p>Es gibt 120 verschiedene Reihenfolgen (Anordnungen), in denen die fünf Studenten zur Uni gelangen können.</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p> <p>An der ersten Stelle der Anordnung können 5 verschiedene Namen stehen, an der zweiten Stelle nur noch vier (da ja ein Name schon für die erste Stelle vergeben wurde), an der dritten Stelle demnach nur noch 3 usw.</p> <p>Die Anzahl alle möglichen Anordnungen ermittelt sich wie folgt: $\rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$</p>
<p>A 1.2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die sechs Seiten eines Würfels mit sechs verschiedenen Farben zu streichen?</p> <p>Gegeben sind $n = 6$ Elemente [Farben], welche auf $k = 6$ Plätze [Seiten des Würfels] angeordnet werden sollen. Entsprechend der Aufgabenstellung ist im Ergebnis die Anordnung der Farben wesentlich. Gleichzeitig ist $n=k$.</p> <p>Dies entspricht einer Permutation. Eine Wiederholung der Elemente wird ausgeschlossen [...<i>verschiedenen</i> Farben...].</p> <p>Damit handelt es sich um eine Permutation ohne Wiederholung.</p> <p>geg.: $n = 6$ ges.: $P(n) = n!$ (1.4)</p> <p>$P(6) = 6! = 720.$</p> <p>Auf 720 verschiedene Arten kann man einen sechsseitigen Würfel mit sechs verschiedenen Farben streichen.</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p> <p>Sie sollten sich hier von der Vorstellung eines Würfels lösen. Es ist nur wichtig, dass er 6 Seiten hat, also 6 mögliche Stellen, auf denen die 6 Farben (Elemente) angeordnet werden können.</p>
<p>A 1.3. Wie viele verschiedene Sitzanordnungen gibt es für Ihre acht Freunde an Ihrer Geburtstagstafel?</p> <p>Diese Fragestellung beinhaltet, dass genau 8 Plätze ($k = 8$ Stellen) an ihrer Geburtstagstafel vorhanden sind, welche die acht Freunde ($n = 8$ Elemente) einnehmen können. Hier ist keine Wiederholung möglich, da ein Freund auch nur einen Platz einnehmen wird. Dies entspricht einer Permutation ohne Wiederholung.</p> <p>geg.: $n = 8$</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p> <p>Beachten Sie bitte, dass es hier genau $n = k$ Elemente (hier Freunde) gibt. Gäbe es mehr Freunde als freie Sitzplätze, entspräche dies dann einer Variation ohne Wiederholung (vgl. 1.9.3).</p>

2.3 Aufgabensystematik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die folgende Übersicht stellt die am meisten in Klausuren verwendeten Aufgabentypen und -stellungen dieses Themenbereichs dar. Die genaue Aufgabenstellung in Klausuren Ihres Lehrstuhls kann davon abweichen.

Arbeiten sie mit dieser Übersicht, indem Sie die Inhalte der alten Klausuraufgaben Ihres Lehrstuhls anhand dieses Schemas sorgfältig überprüfen und systematisieren. Passen Sie die Übersicht gegebenenfalls an oder ergänzen Sie sie.

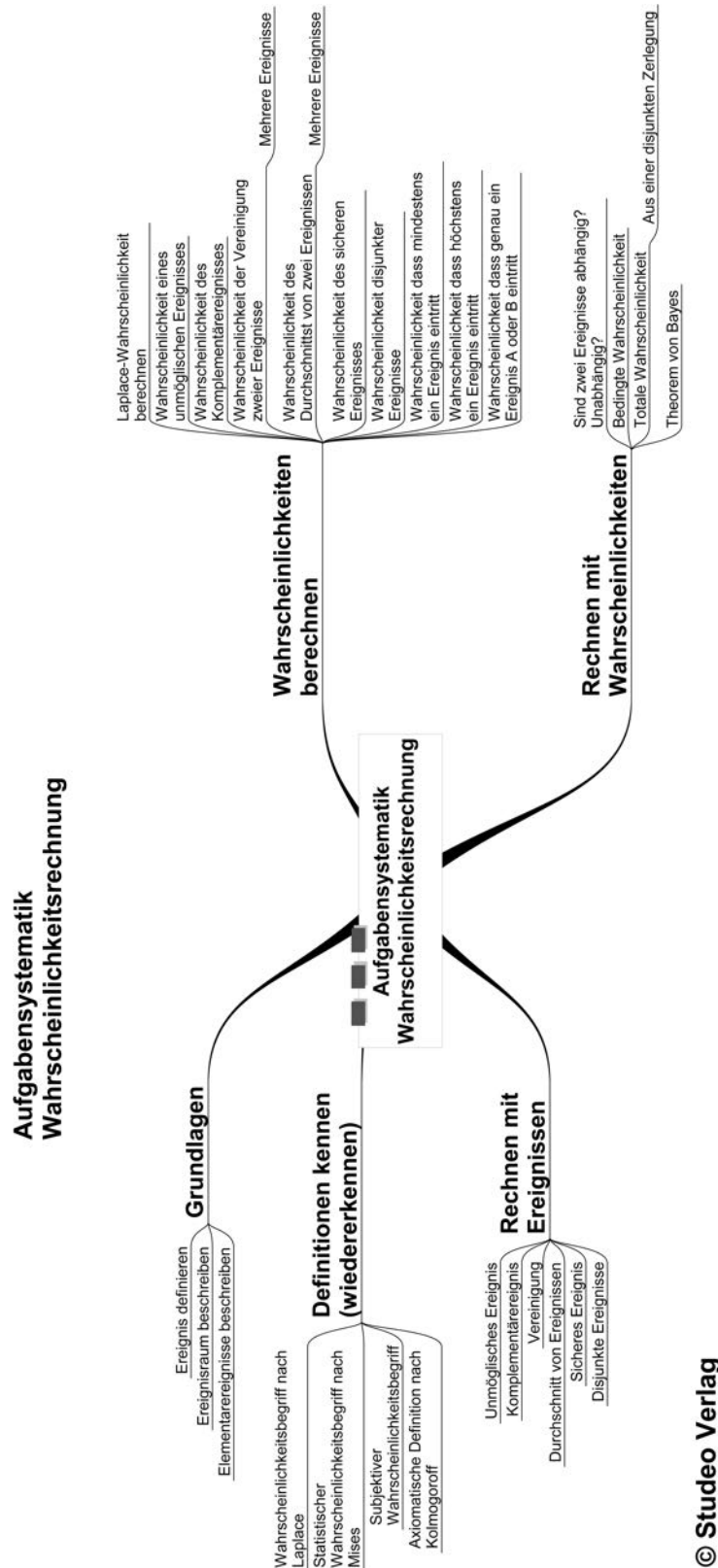


Abb. 2-2: Mindmap Aufgabensystematik Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.6 Musteraufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diese Aufgaben sind beispielhaft für den Themenbereich. **Arbeiten Sie mit diesen Musteraufgaben, indem Sie** die einzelnen Fragen mit den Aufgabenstellungen Ihrer Übung / Ihres Tutoriums, vor allem aber mit denen der alten Klausuren Ihres Lehrstuhls vergleichen. Kreuzen Sie in den rechten Spalten die Fragestellungen an, die für Sie relevant sind und ergänzen Sie die Liste gegebenenfalls um weitere relevante Fragestellungen in diesem Themenbereich. Schicken Sie uns diese Fragestellungen per Email an verlag@studeo.de.

2.6.1 Musteraufgabe 1 – Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Ein Würfel wird einmal geworfen. Betrachtet werden die drei Ereignisse:

A: „Die Augenzahl ist kleiner als 4“

B: „Die Augenzahl ist gerade“ und

C: „Die Augenzahl ist 5“.

Ref.Nr.	Aufgabenstellung	Relevant	Klar	Üben
A 1.1.	Geben Sie für dieses Zufallsexperiment den Ereignisraum an.			
A 1.2.	Definieren Sie die Ereignisse A, B und C mittels der Elementarereignisse.			
A 1.3.	Geben Sie die Ereignisse für $A \setminus B$ an.			
A 1.4.	Bestimmen Sie den Durchschnitt der Ereignisse A und B.			
A 1.5.	Bestimmen Sie die Vereinigung der Ereignisse A und B.			
A 1.6.	Stellen Sie die Ereignisse A und B, deren Vereinigung und deren Durchschnitt in einem Venn-Diagramm dar.			
A 1.7.	Geben Sie ein unmögliches Ereignis für dieses Zufallsexperiment an			
A 1.8.	Was ist das Komplementärereignis zu A?			
A 1.9.	Was ist das Komplementärereignis zu C?			
A 1.10.	Gilt $A \subset B$?			
A 1.11.	Sind die Ereignisse A und B disjunkt?			
A 1.12.	Sind die Ereignisse A und C disjunkt?			
A 1.13.	Sind die Ereignisse A und C äquivalent?			
A 1.14.	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C nach der Definition von Laplace.			
A 1.15.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt?			
A 1.16.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt?			
A 1.17.	Welche Wahrscheinlichkeit hat das Komplementärereignis zu C?			
A 1.18.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Ereignisse A bzw. B eintritt?			
A 1.19.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Ereignisse A bzw. B eintritt?			
A 1.20.	Was ist das sichere Ereignis? (Beschreiben Sie dies mit den gegebenen Ereignissen)			
A 1.21.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Ereignis A oder B eintritt?			

<p>A 1.15. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt?</p> <p>ges.: $P(A \cap B)$?</p> <p>Bestimmen Sie die günstigen Ereignisse von $(A \cap B)$.</p> $A \cap B = \{2\}$ <p>Zählen Sie die günstigen Ereignisse, die zum Ereignis $(A \cap B)$ gehören, und berechnen Sie die Laplace-Wahrscheinlichkeit.</p> $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(A \cap B)$ beträgt $\frac{1}{6}$.</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p> <p>Nur an den Stellen, wo sich die Ereignismengen überschneiden (Durchschnitt), treten auch beide Ereignisse ein. (siehe A 1.4. und A 1.6.)</p>
<p>A 1.16. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt?</p> <p>ges.: $P(A \cup B)$?</p> <p>1. Weg: Bestimmen Sie die Anzahl der günstigen Ereignisse $(A \cup B)$.</p> $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ <p>2. Weg: Allgemeiner Additionssatz (2.4)</p> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ <p>geg.: $P(A) = \frac{1}{2}$</p> $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ $= \frac{5}{6}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$ beträgt $\frac{5}{6}$.</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p> <p>(siehe A 1.5.)</p>
<p>A 1.17. Welche Wahrscheinlichkeit hat das Komplementärereignis zu C?</p> <p>ges.: $P(\bar{C})$?</p> <p>geg.: $P(C) = \frac{1}{6}$ (siehe A 1.14.)</p> $P(\bar{C}) = 1 - P(C)$ $P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit $P(\bar{C})$ des Komplementärereignisses von C beträgt $\frac{5}{6}$.</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p> <p>Die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses ist immer 1 minus der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses (hier C).</p>
<p>A 1.18. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Ereignisse A bzw. B eintritt?</p> <p>ges.: $P(\overline{A \cup B})$</p> <p>Wenn keines der Ereignisse A und B eintreten soll, so heißt das, dass „weder A noch B eintreten“. Dies ist aber genau das Komplementärereignis zu „A oder B treten ein“.</p> <p>Bestimmen Sie $P(\overline{A \cup B})$ und berechnen Sie dann:</p> $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ $= 1 - \frac{5}{6}$ $= \frac{1}{6}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass keines der beiden Ereignisse eintritt, ist $\frac{1}{6}$.</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p> <p>(vgl. A 1.16.)</p>
<p>A 1.19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Ereignisse A bzw. B eintritt?</p> <p>Weg 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eins der Ereignisse A bzw. B eintritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass A oder B oder beide Ereignisse eintreten. Letzteres ist aber $P(A \cup B)$.</p>	<p>Relev. <input type="checkbox"/> Ü1 <input type="checkbox"/> Ü2 <input type="checkbox"/> Ü3 <input type="checkbox"/> OK <input type="checkbox"/></p>

$$P(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (6.15)$$

bzw. das genaue Intervall als:

$$[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}] \quad (6.15)$$

Zur Sicherheit schreiben Sie beide Formeln für dieses Konfidenzintervall auf, da man sich nie sicher sein kann, was der Professor genau meint.

A 2.4. Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Anzahl der mit einem Toner bedruckbaren Seiten.

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

Nachdem Sie in Aufg. 2.3 die Formel für das Konfidenzintervall angeben mussten, bekommen Sie nun die zusätzliche Information, dass das Konfidenzniveau 95% ist,

$$\text{Konfidenzniveau} = 1 - \alpha = 0,95$$

und dass sich ihre Intervallschätzung auf die Stichprobe aus der Aufgabenstellung beziehen soll. Damit haben Sie alle Informationen, die Sie benötigen. Setzen Sie die Werte in die Formel (6.15) ein und bestimmen Sie das Konfidenzintervall.

$$\begin{aligned} \text{geg.: } \bar{x} &= 3100 \\ s &= \sqrt{s^2} = \sqrt{47000} = 216,79 \\ n &= 6 \\ 1 - \alpha &= 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \\ df &= n - 1 = 5 \end{aligned}$$

Ein Freiheitsgrad geht aufgrund der Schätzung der unbekanntes Varianz verloren.

Bestimmen Sie das Quantil der t-Verteilung $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$ aus der Verteilungstabelle.

$$\begin{aligned} t_{1-\frac{\alpha}{2},df} &= t_{1-\frac{0,05}{2},df=5} = t_{1-0,025;df=5} = t_{0,975;df=5} \\ &= 2,571 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}] &= [3100 - 2,571 \frac{216,79}{\sqrt{6}}; 3100 + 2,571 \frac{216,79}{\sqrt{6}}] \quad (6.15) \\ &= [2872,01; 3327,99] \end{aligned}$$

Wenn es an Ihrem Lehrstuhl üblich ist, so geben Sie hier auch die Grenzen einzeln an:

$$\begin{aligned} g_u &= 2872,01 \\ g_o &= 3327,99 \end{aligned}$$

Das gesuchte 95% Konfidenzintervall beträgt [2872,01; 3327,99].

A 2.5. Verbalisieren Sie das Ergebnis von A 3.4.!

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

Mit einer Sicherheit von 95% überdeckt das Konfidenzintervall zwischen $g_u = 2872,01$ und $g_o = 3327,99$ Seiten den unbekanntes Parameter μ für die Anzahl der mit einem Toner bedruckbaren Seiten.

A 2.6. Welche Möglichkeiten haben Sie bei der Planung einer solchen Untersuchung, Einfluss auf die Länge des Schätzintervalls zu nehmen?

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

Schauen Sie sich die Formel der Länge des Intervalls für diese Schätzung genau an:

$$l = 2 \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2},df} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (6.15)$$

In der Formel stehen genau 5 Parameter, die vor der Untersuchung nicht bestimmt sind: α , df , $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$, s , n .

- s die Realisierung einer Zufallsvariablen aufgrund der Stichprobenziehung (also zufällig)
- $t_{1-\frac{\alpha}{2},df}$ ist selbst nur von $(1-\alpha)$ und den Freiheitsgraden df abhängig
- $df = n - 1$ (also von n abhängig)

Wie Sie sehen können, haben Sie nur einen Einfluss auf die Wahl von α und die Stichprobengröße n . Dies ist hier die richtige Antwort:

Die Länge des Schätzintervalls kann durch die Größe der Stichprobe n und das vorgegebene Konfidenzniveau α beeinflusst werden.

A 2.7. Wie würde sich das Schätzintervall verändern, wenn σ^2 als bekannt vorausgesetzt werden kann?

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

Sie müssten dann die andere Formel für das Konfidenzintervall des Erwartungswertes bei bekannter Varianz benutzen:

X \ Y	Mann	Frau	
gut	5	15	20
mittel	10	5	15
schlecht	5	10	15
	20	30	50

Summe der Zeilen- bzw. Spaltenwerte...

(vgl. Kap. 4)

A 3.2. Formulieren Sie verbal die Hypothesen.

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

H_0 : „Kleidungsstil und Geschlecht sind stochastisch unabhängig“
 H_1 : „Kleidungsstil und Geschlecht sind nicht stochastisch unabhängig“

Paul möchte eine Zusammenhangshypothese testen. Dazu setzt man erst einmal die Unabhängigkeit voraus – um sie ggf. abzulehnen.

A 3.3. Ist eine Anwendung der χ^2 -Verteilung hier gerechtfertigt ?

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

Prüfen Sie die Bedingungen in der Formel (7.12)!

Es muss gelten: $h_{e_{ij}} > 5$ für alle i, j , d.h. die aus den Randverteilungen theoretisch zu erwartenden Häufigkeiten $h_{e_{ij}}$ müssen alle größer als 5 sein.

Erstellen Sie eine Tabelle der zu erwartenden Häufigkeiten. Dazu wird jeder Wert einer Zelle aus den Randverteilungen (unter Annahme der Unabhängigkeit der beiden Verteilungen X und Y) berechnet:

$$h_{e_{ij}} = \frac{H_{i\cdot} \cdot H_{\cdot j}}{n}$$

X \ Y	Mann	Frau	$H_{i\cdot}$
gut	8	12	20
mittel	6	9	15
schlecht	6	9	15
$H_{\cdot j}$	20	30	50

Es gilt die Bedingung $h_{e_{ij}} > 5$, weshalb die χ^2 -Verteilung angewendet werden darf.

A 3.4. Füllen Sie die Entscheidung bei $\alpha = 1\%$.

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

geg.: theoretische und beobachtete Verteilung
 $\alpha = 0,01$

Bestimmen Sie das Quantil der χ^2 -Verteilung.

Die Freiheitsgrade berechnen sich nach $df = (I-1)(J-1) = (3-1)(2-1) = 2$ (7.12)
 $\chi^2_{1-\alpha; df} = \chi^2_{0,99; 2} = 9,21$

Berechnen Sie anschließend die Testgröße.

$$T = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(h_{0_{ij}} - h_{e_{ij}})^2}{h_{e_{ij}}} \quad (7.12)$$

$$T = \frac{(5-8)^2}{8} + \frac{(10-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(15-12)^2}{12} + \frac{(5-9)^2}{9} + \frac{(10-9)^2}{9}$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{16}{6} + \frac{1}{6} + \frac{9}{12} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= 6,597$$

Auch hier erfolgt wieder eine einseitige Bestimmung des kritischen Wertes, da die Summe in der Testgröße nur größer werden kann... bis Sie irgendwann zur Ablehnung der Nullhypothese führt.

Es gilt: $T = 6,597 < \chi^2_{0,99; 2} = 9,21$. Für die vorliegende Zufallsstichprobe und ein gegebenes $\alpha = 0,01$ kann die Nullhypothese der Unabhängigkeit der beiden Verteilungen nicht verworfen werden.

A 3.5. Füllen Sie die Entscheidung bei $\alpha = 5\%$.

Relev. Ü1 Ü2 Ü3 OK

geg.: theoretische und beobachtete Verteilung
 $\alpha = 0,05$

Bestimmen Sie das Quantil der χ^2 -Verteilung.